

# Problemi di Fisica

## I Vettori

**PROBLEMA**

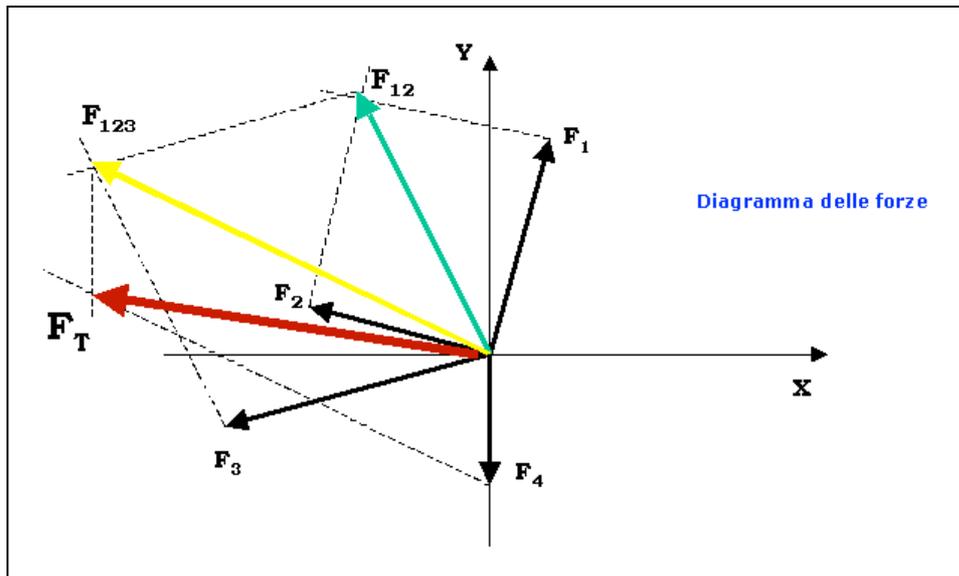
Determinare la risultante, sia dal punto di vista grafico che analitico, delle seguenti forze:

$$\mathbf{F}_1 = (2; 6)$$

$$\mathbf{F}_2 = (-4; 2)$$

$$\mathbf{F}_3 = (-6; -3)$$

$$\mathbf{F}_4 = (0; -4)$$

**SOLUZIONE****Metodo grafico****Metodo analitico**

Tenendo presente il verso delle componenti delle quattro forze, le componenti della forza totale sono date da:

$$F_{XT} = \sum F_X = 2 - 4 - 6 + 0 = -8\text{N} \quad F_{YT} = \sum F_Y = 6 + 2 - 3 - 4 = 1\text{N} \quad \mathbf{F} = (-8; 1)$$

per cui il modulo della forza totale è dato da:

$$F_T = \sqrt{F_{XT}^2 + F_{YT}^2} = \sqrt{(-8)^2 + (1)^2} = \sqrt{65} = 8.1\text{N}$$

mentre l'argomento è:

$$\text{tg}\alpha = \frac{F_{YT}}{F_{XT}} = \frac{1}{-8} = -0,125 \Rightarrow \alpha = -7,1^\circ = 172,9^\circ$$

**PROBLEMA**

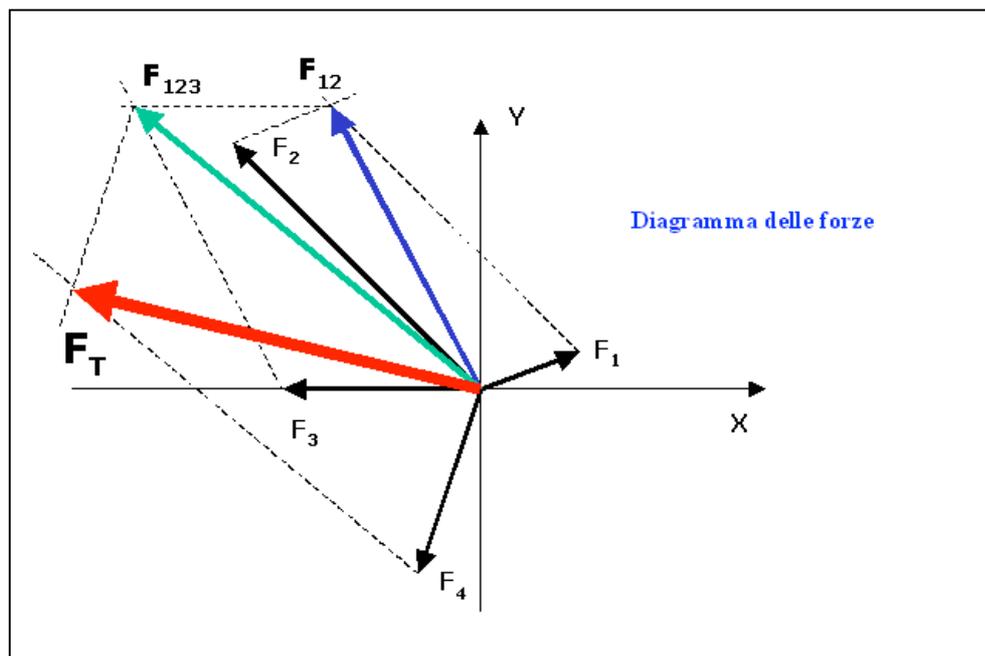
Determinare la risultante, sia dal punto di vista grafico che analitico, delle seguenti forze:

$$F_1 = 30 \text{ N} \quad \alpha_1 = 30^\circ$$

$$F_3 = 70 \text{ N} \quad \alpha_3 = 180^\circ$$

$$F_2 = 140 \text{ N} \quad \alpha_2 = 135^\circ$$

$$F_4 = 80 \text{ N} \quad \alpha_4 = 250^\circ$$

**SOLUZIONE****Metodo grafico****Metodo analitico**

Le componenti delle singole forze sono:

$$F_{1X} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 30 \cdot \cos 30^\circ = 26 \text{ N}$$

$$F_{1Y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 30 \cdot \sin 30^\circ = 15 \text{ N}$$

$$F_{2X} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 140 \cdot \cos 135^\circ = -99 \text{ N}$$

$$F_{2Y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 140 \cdot \sin 135^\circ = 99 \text{ N}$$

$$F_{3X} = F_3 \cdot \cos \alpha_3 = 70 \cdot \cos 180^\circ = -70 \text{ N}$$

$$F_{3Y} = 0$$

$$F_{4X} = F_4 \cdot \cos \alpha_4 = 80 \cdot \cos 250^\circ = -27 \text{ N}$$

$$F_{4Y} = F_4 \cdot \sin \alpha_4 = 80 \cdot \sin 250^\circ = -75 \text{ N}$$

Le componenti della forza totale sono date da:

$$F_{XT} = \sum F_X = 26 - 99 - 70 - 27 = -170 \text{ N}$$

$$F_{YT} = \sum F_Y = 15 + 99 + 0 - 75 = 39 \text{ N}$$

$$\mathbf{F} = (-170; 39)$$

Pertanto l'intensità della forza risultante è data da:

$$F_T = \sqrt{F_{XT}^2 + F_{YT}^2} = \sqrt{(-170)^2 + (39)^2} = \sqrt{28900 + 1521} = \sqrt{30421} = 174\text{N}$$

mentre l'argomento è:

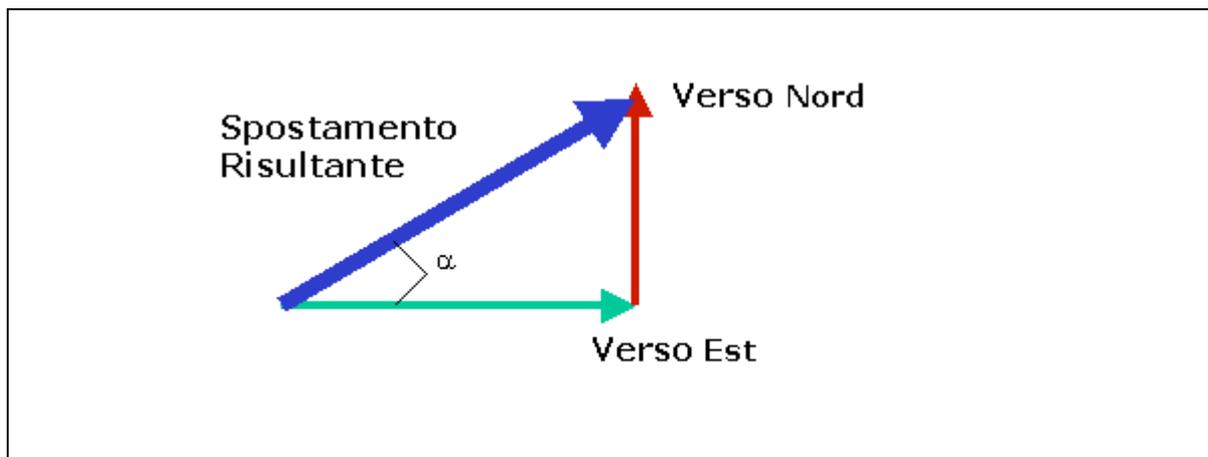
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_{YT}}{F_{XT}} = \frac{39}{-170} = -0,23 \qquad \alpha = -13^\circ = 167^\circ$$

## PROBLEMA

Un'automobile si sposta di 40 km verso est e di 30 km verso nord. Determinare lo spostamento risultante.

## SOLUZIONE

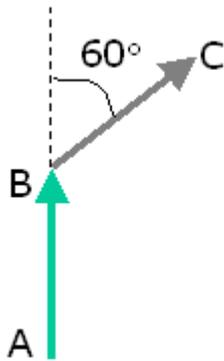
Rappresentiamo graficamente il problema:



dove il vettore risultante è stato trovato applicando la regola della poligonale, detta anche punta - coda.

Il modulo e l'argomento dello spostamento risultante sono dati da:

$$S = \sqrt{40^2 + 30^2} = \sqrt{2500} = 50\text{km} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{30}{40} = 0,75 \Rightarrow \alpha = 36,9^\circ$$

**PROBLEMA**

Considera i due vettori spostamento **AB** e **BC** della seguente figura. Calcolare il vettore somma **AC**, sapendo che il modulo di **AB** e quello di **BC** sono 100 m.

**SOLUZIONE**

Graficamente il vettore somma è dato dalla regola della poligonale. Dal punto di vista analitico si procede nel seguente modo:

Calcoliamo le componenti di **S<sub>1</sub>** e **S<sub>2</sub>**:

$$S_{1x} = 0 \quad S_{1y} = 100\text{m}$$

$$S_{2x} = S_2 \cdot \cos \alpha_2 = 100 \cdot \cos(90^\circ - 60^\circ) = 86,6\text{m}$$

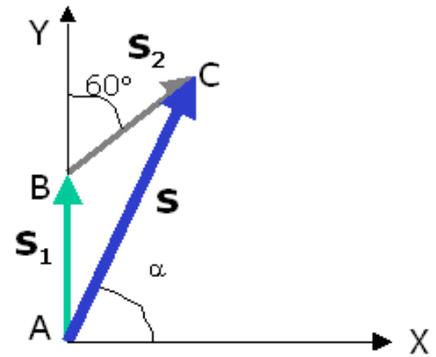
$$S_{2y} = S_2 \cdot \sin \alpha_2 = 100 \cdot \sin(90^\circ - 60^\circ) = 50\text{m}$$

Il vettore somma avrà come componenti:

$$S_{Tx} = S_{1x} + S_{2x} = 0 + 86,6 = 86,6\text{m} \quad S_{Ty} = S_{1y} + S_{2y} = 100 + 50 = 150\text{m} \quad \mathbf{S_T} = (86,6; 150)$$

Pertanto, l'intensità e l'argomento sono dati da:

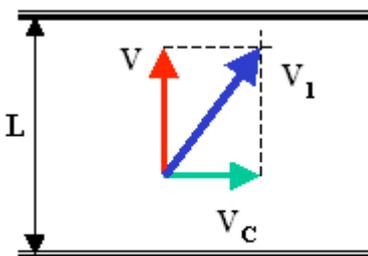
$$S_T = \sqrt{S_{Tx}^2 + S_{Ty}^2} = \sqrt{86,6^2 + 150^2} = 173\text{m} \quad \text{tg} \alpha = \frac{S_{Ty}}{S_{Tx}} = \frac{150}{86,6} = 1,73 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

**PROBLEMA**

Un ragazzo attraversa a nuoto un fiume con una velocità  $V = 5 \text{ km/h}$ . Se la velocità della corrente è  $V_C = 3 \text{ km/h}$ , quale sarà la velocità effettiva del ragazzo e la sua direzione di nuoto?

**SOLUZIONE**

Rappresentiamo il problema dal punto di vista vettoriale:



Il ragazzo si muoverà con una velocità effettiva **V<sub>1</sub>** che è la risultante tra le velocità **V** e **V<sub>c</sub>**, il cui modulo e argomento è dato da:

$$V_1 = \sqrt{V^2 + V_C^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = 5,83\text{km/h}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{V}{V_C} = \frac{5}{3} = 1,67 \Rightarrow \alpha = 59^\circ$$

## PROBLEMA

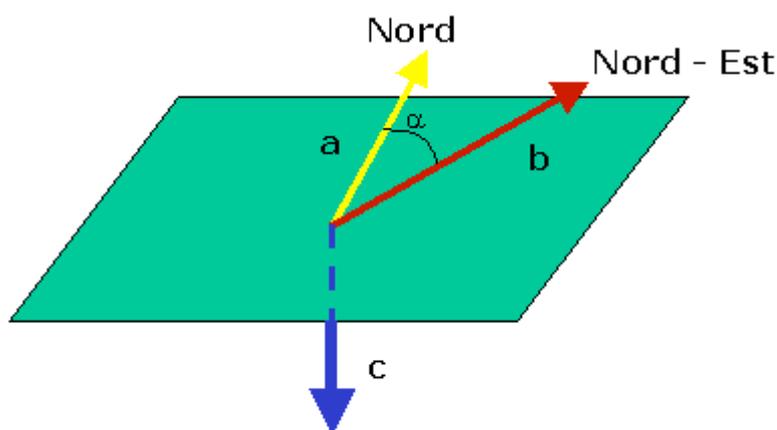
Il vettore **a** è rivolto verso Nord ed ha intensità  $a = 4,0$ . Il vettore **b** è rivolto verso Nord - Est, formando un angolo di  $30^\circ$  con il primo, ed ha intensità  $b = 6,5$ . Determinare il loro prodotto scalare e vettoriale.

## SOLUZIONE

### Prodotto scalare

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha = 4,0 \cdot 6,5 \cdot \cos 30^\circ = 22,5 \quad c = \text{scalare}$$

### Prodotto vettoriale



$$\vec{c} = \vec{a} \otimes \vec{b}$$

$$c = a \cdot b \cdot \sin \alpha = 4,0 \cdot 6,5 \cdot \sin 30^\circ = 13$$

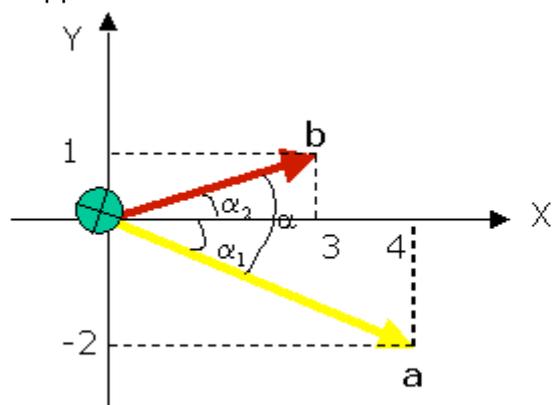
**c** è un vettore di modulo 13, diretto perpendicolarmente al piano contenente i vettori **a** e **b** e orientato verso il basso (regola del cavatappi o regola della mano destra).

## PROBLEMA

Siano dati il vettore **a** = (4; -2) ed il vettore **b** = (3; 1). Calcolare il prodotto scalare e vettoriale.

## SOLUZIONE

Rappresentiamo i due vettori su un sistema di assi cartesiani:



Simbolo che rappresenta un vettore perpendicolare al piano che contiene i vettori **a** e **b** e con verso uscente dal piano (il vettore è diretto verso l'osservatore)



Simbolo che rappresenta un vettore perpendicolare al piano che contiene i vettori **a** e **b** e con verso entrante nel piano (opposto all'osservatore)

Calcoliamo modulo ed argomento di ogni singolo vettore:

$$a = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 4,5 \quad \text{tg}\alpha_1 = \frac{-2}{4} = -0,5 \Rightarrow \alpha_1 = -26,6^\circ$$

$$b = \sqrt{3^2 + 1^2} = 3,2 \quad \text{tg}\alpha_2 = \frac{1}{3} = 0,3 \Rightarrow \alpha_2 = 18,4^\circ$$

Pertanto l'angolo tra i due vettori sarà:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 45^\circ$$

In definitiva:

### Prodotto scalare

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\alpha = 4,5 \cdot 3,2 \cdot \cos 45^\circ = 10,2 \quad c = \text{scalare}$$

### Prodotto vettoriale

$$\vec{c} = \vec{a} \otimes \vec{b}$$

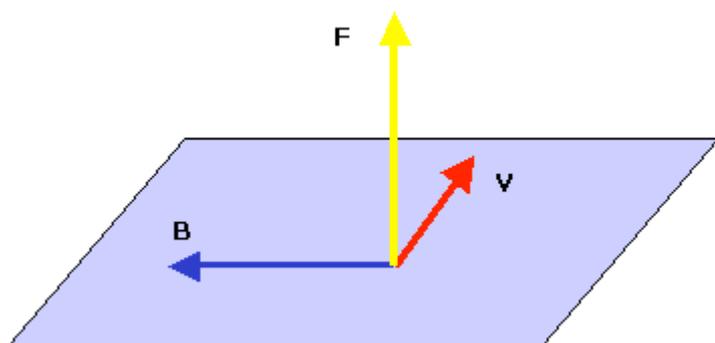
$$c = a \cdot b \cdot \text{sen}\alpha = 4,5 \cdot 3,2 \cdot \text{sen}45^\circ = 10,2$$

$\vec{c}$  è un vettore di modulo 10,2 e diretto perpendicolarmente al piano contenente i vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  e con verso uscente dal piano, cioè verso l'osservatore (regola del cavatappi o regola della mano destra).

## PROBLEMA

Un protone ( $p=1,6 \cdot 10^{-19}$  C;  $m=1,67 \cdot 10^{-27}$  kg) entra in un campo magnetico uniforme  $B=0,30$  T, con una velocità  $V=1,0 \cdot 10^4$  m/s perpendicolare al campo magnetico. Calcolare la forza magnetica sul protone.

## SOLUZIONE



Gli esperimenti dimostrano che una carica elettrica immersa in un campo magnetico subisce una forza magnetica data da:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{V} \otimes \vec{B}$$

Poiché  $\vec{F}$  è una grandezza vettoriale, avrà un'intensità pari a:

$$F = q \cdot V \cdot B \cdot \sin\alpha = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,0 \cdot 10^4 \cdot 0,30 \cdot 1 = 4,8 \cdot 10^{-16} \text{ N} \quad \text{dove: } \alpha = 90^\circ \Rightarrow \sin 90^\circ = 1$$

Un verso e una direzione dati dalla regola della mano destra:

ponendo il pollice della mano destra nel verso della velocità e le altre dita nel verso del campo magnetico, la forza magnetica avrà direzione perpendicolare al palmo della mano e verso uscente.

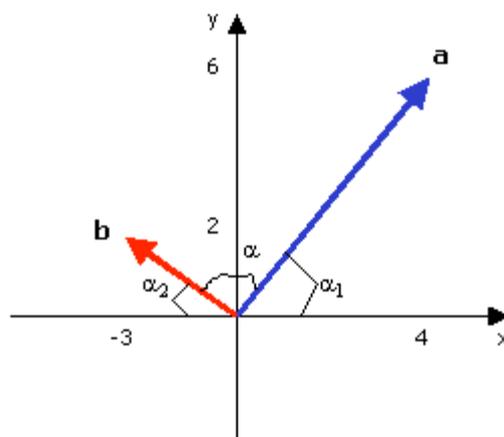
## PROBLEMA

Dati i vettori  $\mathbf{a} = (4; 6)$  e  $\mathbf{b} = (-3; 2)$ , calcolare il loro prodotto scalare e vettoriale.

## SOLUZIONE

Poiché sono note le coordinate cartesiane dei vettori, calcoliamo il prodotto scalare e vettoriale nel seguente modo:

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = 4 \cdot (-3) + 6 \cdot 2 = 0$$



$$\vec{c} = \vec{a} \otimes \vec{b} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{punto di applicazione: lo stesso dei} \\ \text{vettori } \mathbf{a} \text{ e } \mathbf{b} \\ \text{direzione: perpendicolare al piano che} \\ \text{contiene i vettori } \mathbf{a} \text{ e } \mathbf{b} \\ \text{verso: entrante} \\ \text{intensità: } c = a_x b_y - a_y b_x = 4 \cdot 2 - 6 \cdot (-3) = 26 \end{array}$$

Esprimendo i vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  attraverso le coordinate polari (modulo ed argomento):

$$a = \sqrt{4^2 + 6^2} = 7,21 \quad \text{tg}\alpha_1 = \frac{6}{4} = 1,5 \Rightarrow \alpha_1 = 56,3^\circ$$

$$b = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = 3,6 \quad \text{tg}\alpha_2 = \frac{2}{-3} = -0,67 \Rightarrow \alpha_2 = -33,7^\circ$$

il prodotto scalare e vettoriale si calcolano come:

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cdot \cos\alpha = 7,21 \cdot 3,6 \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$\vec{c} = \vec{a} \otimes \vec{b} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{punto di applicazione: lo stesso dei vettori } \mathbf{a} \text{ e } \mathbf{b} \\ \text{direzione: perpendicolare al piano che contiene i vettori } \mathbf{a} \text{ e } \mathbf{b} \\ \text{verso: entrante} \\ \text{intensità: } c = ab \cdot \sin\alpha = 7,21 \cdot 3,6 \cdot \sin 90^\circ = 26 \end{array}$$

dove:  $\alpha = 180^\circ - (56,3 + 33,7) = 90^\circ$